Sesión de resolución de problemas

13/12/2019

Ejercicio 1. *Pequeño teorema de Fermat.*

Ejercicio 2. *Sea n un entero positivo. ¿De cuántas formas distintas podemos escribir n como suma de m enteros positivos? Consideramos que importa el orden, es decir, $3 = 2 + 1 = 1 + 2$ son dos formas distintas de expresar 3 con 2 sumandos.*

Ejercicio 3. *Sea n un entero positivo. ¿De cuántas formas distintas podemos escribir n como suma de m enteros no negativos? Consideramos que importa el orden, es decir, $1 = 1 + 0 = 0 + 1$ son dos formas distintas de expresar 1 con 2 sumandos.*

Ejercicio 4. *Sea n un entero positivo. Decimos que una sucesión de n enteros positivos es buena si satisface la siguiente condición: para cada entero positivo $k \geq 2$, si el número k aparece en la sucesión también aparece $k-1$, y la primera aparición de $k-1$ es anterior a la última aparición de k. Para cada n, ¿Cuántas sucesiones buenas de enteros positivos hay?*

Ejercicio 5. *Un club tiene 25 miembros. Cada comité está formado por 5 miembros. Dos comités cualesquiera tienen como mucho un miembro en común. Prueba que el número de comités no puede ser superior a 30.*

Ejercicio 6. *Sea $A = \{1, 2, .., 2n\}$. Probar que tomando arbitrariamente $n+1$ elementos de A, siempre hay dos cuya suma es divisible por $2n+1$.*

Ejercicio 7. *Un jugador de ajedrez tiene 77 días para preparar un torneo. Sabiendo que juega al menos una partida al día, y menos de 132 en total, probar que hay una serie de días consecutivos en los que juega exactamente 21 partidas.*

Ejercicio 8. *En una isla del Pacífico se observa que nada más que sobreviven unos camaleones, que pueden cambiar de color. En total hay 20 verdes, 19 grises y 18 marrones. Se observa que cuando se encuentran dos camaleones de colores distintos, los dos cambian automáticamente al tercer color y que no cambian de color en ningún otro caso. ¿Es posible que todos los camaleones se vuelvan del mismo color?*

Ejercicio 9. *Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas negras formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena con exactamente n bolas blancas y n bolas negras.*

Ejercicio 10. *En una clase hay n chicos y n chicas, donde n es un entero positivo. Todas las alturas de los alumnos son distintas. Cada chica cuenta el número de chicos más altos que ella, y le resta el número de chicas más bajas que ella. Cada chico cuenta el número de chicas más bajas que él, y le resta el número de chicos que son más bajos que él. Probar que los números que escriben las chicas son los mismos que escriben los chicos.*

Ejercicio 11. *Se trazan varias cuerdas de un círculo de forma que ningún diámetro interseca a más de 4 cuerdas. Probar que la suma de las longitudes de las cuerdas es menor que 13.*

Ejercicio 12. *Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n+1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.*

Ejercicio 13. *Prueba que si para un número real a se tiene que $a + 1/a$ es entero, entonces $a^n + 1/a^n$ también es entero.*

Ejercicio 14. *En un torneo cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores exactamente una vez, y en cada juego hay un ganador y un perdedor. Decimos que los jugadores $p_1, p_2, \ldots, p_m$ forman un ciclo de longitud m si p_1 le gana a p_2, p_2 le gana a p_3, $\ldots$, p_{m-1} le gana a p_m, y p_m le gana a p_1. Demostrar que si hay un ciclo $p_1, p_2, \ldots, p_m$ $(m \geq 3)$, entonces hay un ciclo de longitud 3.*

Ejercicio 15. *Hay 2000 personas en línea. Cada una de ellas es honesta y siempre dice la verdad, o mentirosa y siempre miente. Cada uno de ellos dice que hay más mentirosos a su izquierda que honestos a su derecha. Determinar, si es posible, cuántas personas de cada tipo hay.*

Ejercicio 16. *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números enteros tales que se pueden expresar como suma de dos cuadrados perfectos. Probar que su producto $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ puede expresarse igualmente como suma de dos cuadrados perfectos.*

Ejercicio 17. *Si a, b, c son enteros tales que $a^6 + 2b^6 = 4c^6$, probar que $a = b = c = 0$.*

Ejercicio 18. *En cada casilla de una cuadrícula $n \times n$ se escribe un número real con valor absoluto menor que 1, de forma que la suma de los números en cada cuadrado 2×2 es 0. Prueba que la suma de todos los números es menor que n.*